Jakub Juránek, UČO 393110

1.

$$\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ klesající?}$$

$$\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots\right\} \quad \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \Rightarrow \text{ není klesající}$$

Je rostoucí?

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{n+1}{n+2} & \qquad a_{n+1} = \frac{n+2}{n+3} \\
a_n &< a_{n+1} \\
\frac{n+1}{n+2} &< \frac{n+2}{n+3} \quad (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+2 > 0 \ \land \ n+3 > 0) \\
(n+1)(n+3) &< (n+2)^2 \\
n^2 + 4n + 3 &< n^2 + 4n + 4 \\
0 &< 1 \Rightarrow \text{ je rostoucí}
\end{aligned}$$

2.

$$\left\{\frac{1}{2n+2}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ rostoucí?}$$

$$\left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots\right\} \quad \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \frac{1}{8} \Rightarrow \text{ není rostoucí}$$

Je klesající?

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2n+2} & \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2n+4} \\
a_n &> a_{n+1} \\
\frac{1}{2n+2} &> \frac{1}{2n+4} \quad (n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n+2 > 0 \ \land \ 2n+4 > 0) \\
2n+4 &> 2n+2 \\
2 &> 0 \Rightarrow \text{ je klesající}
\end{aligned}$$

3.

$$\{(5n+1)(3n-5)\}_{n=1}^{\infty} \text{ rostoucí, ohraničená?}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= (5n+1)(3n-5) = 15n^2 - 22n - 5 \\
a_{n+1} &= (5n+6)(3n-2) = 15n^2 + 8n - 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &< a_{n+1} \\
15n^2 - 22n - 5 &< 15n^2 + 8n - 12 \\
7 &< 30n \\
n &> \frac{7}{30} \quad \text{přičemž } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ je rostoucí}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Rostoucí } \Rightarrow \text{ ohraničená zdola } a_1 = (5+1)(3-5) = -12 \\
\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (15n^2 - 22n - 5) = \infty \ \Rightarrow \text{ není shora ohraničená}
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ není ohraničená}$$