Jakub Juránek, UČO 393110

1.5.B12c

$$f : A \to B, \quad A = (a, b), \quad B = \mathbb{R}^+$$
$$f(x) = \frac{x-a}{b-x}$$

Je f surjektivní?

$$\begin{aligned}
y \in B\ lib. : \quad y &= \frac{x-a}{b-x}, \quad x \in (a,b) \Rightarrow b - x \neq 0 \\
yb - yx &= x - a \\
yx + x &= yb + a \\
x(y+1) &= yb + a \\
x &= \frac{yb+a}{y+1}
\end{aligned}$$

Nyní máme vztah, kterým pro každý obraz y dostáváme vzor x. Ovšem musíme ještě ověřit, že všechny tyto vzory leží v množině A, tedy, že platí:

$$a < \frac{yb+a}{y+1} < b, \quad y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y + 1 > 0$$

$$\begin{aligned}
a &< \frac{yb+a}{y+1} \\
ya + a &< yb + a \\
ya &< yb, \quad y \in \mathbb{R}^+ \\
a &< b, \quad \text{plyne z existence intervalu } (a,b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{yb+a}{y+1} &< b \\
yb + a &< yb + b \\
a &< b, \quad \text{plyne opět z existence intervalu } (a,b)
\end{aligned}$$

Pro každý prvek $y \in B$ tedy existuje prvek $x \in A$ tak, že $f(x) = y \Rightarrow f$ je surjektivní.