Jakub Juránek, UČO 393110

2. cvičení

1.
Dáno:
$R = 5 \cdot 10^{-11}$ m
$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C
$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F m^{-1}

$$e = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \Rightarrow \varrho = \frac{3}{4\pi}\frac{e}{R^3}$$

Aplikujeme Gaussův zákon, využijeme sférické symetrie, přičemž $r \leq R$.

$$\begin{aligned}
\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} &= \frac{Q_C}{\varepsilon_0} \\
4\pi r^2 E &= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho}{\varepsilon_0} \\
E &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r \\
E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R^3} r \\
F &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^3} r
\end{aligned}$$

Sestavíme pohybovou rovnici a vyřešíme.
BÚNO: Nechť se elektron pohybuje po ose x.

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= F \\
m\ddot{x} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^3} x \\
\ddot{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mR^3} x &= 0
\end{aligned}$$

Nyní vidíme, že získaná diferenciální rovnice odpovídá harmonickému kmitavímu pohybu, přičemž:

$$\omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mR^3} \Rightarrow \omega = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

Tedy jeho frakvence je rovna:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e}{4\pi}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

$$f = \frac{e}{4\pi}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 m R^3}} = 7,2 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$$

2.

$$Q = \pi R \tau$$

$$\mathrm{d}Q = R\tau \,\mathrm{d}\alpha = \frac{Q}{\pi}\,\mathrm{d}\alpha$$

Výsledná intenzita v daném působí svisle vzhůru, tudíš budeme započítávat jen příslušnou složku jednotlivých intenzit, která je rovna její velikosti krát kosinus úhlu alfa, přičemž úhel alfa nabývá hodnot $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{R^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

$$E = \int\limits_C \mathrm{d}E = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}[\sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$