Jakub Juránek, UČO 393110

3. cvičení

1.

Na kuličku působí tíhová síla F_g, elektrostatická síla F_e a tahová síla provázku, které jsou v rovnováze. Označme úhel sevřený vláknem a tyčinkou α. Pak platí:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{a}{\frac{L}{2}} = \frac{F_e}{F_g} \\
F_g &= mg \\
\frac{\mathrm{d}F_e}{\mathrm{d}F_{e,x}} &= \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \\
\mathrm{d}F_e &= \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}F_{e,x} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\
F_e &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}F_e = \frac{aq\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\
F_e &= \frac{q\tau}{2\pi a\varepsilon_0}\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} \\
\frac{a}{\frac{L}{2}} &= \frac{\frac{q\tau}{2\pi a\varepsilon_0}\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}}{mg} \\
q &= 4\pi\frac{\varepsilon_0 mg}{\tau}\frac{a^2}{L}\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}{\frac{L}{2}}
\end{aligned}
$$

2.
Uvažme, že má celá koule konstatní hustotu náboje ϱ a dutina $-\varrho$.
Dále uvažme bod v dutině, s polohovým vektorem $\vec{r'}$ vzhledem ke středu koule a $\vec{r''}$ vzhledem ke středu dutiny, přičemž platí $\vec{r''} = \vec{r'} - \vec{r}_0$, kde $\vec{r}_0$ je průvodič středu dutiny vzhledem ke středu koule.
Gaussův zákon $\oint\limits_S \vec{E}\ \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_C}{\varepsilon_0}$ uvažme jednak pro kouli, jednak pro dutinu, za plochz vezměme kulové plochy s poloměry r' a r''. Tímto dostaneme 2 intenzity, přičemž výsledná intenzita je jejich vektorovým součtem.

$$\begin{aligned}
E' 4\pi r'^2 &= \frac{\frac{4}{3}\pi r'^3 \varrho}{\varepsilon_0} \\
E' &= \frac{\varrho r'}{3\varepsilon_0} \\
\vec{E}' &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\vec{r'} \\
\vec{E}'' &= \frac{-\varrho}{3\varepsilon_0}\vec{r''} = \frac{-\varrho}{3\varepsilon_0}(\vec{r'} - \vec{r}_0) \\
\vec{E} &= \vec{E}' + \vec{E}'' = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_0 \\
E &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r_0 \\
E \cdot V_D &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

Při danném r_0 bude daný součin maximální, pokud bude poloměr dutiny maximální, což je $r_{max} = R - r_0$.

$$\begin{aligned}
E \cdot V_D &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r_0 \cdot \frac{4}{3}\pi (R - r_0)^3 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_0} E \cdot V_D &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi (R - r_0)^3 + \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r_0 \cdot \frac{4}{3}\pi 3 (R - r_0)^2 \cdot (-1) = 0 \\
0 &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi (R - r_0)^2 (R - 4r_0) \\
r_{0,max} &= \frac{1}{4} R \\
r_{max} &= \frac{3}{4} R \\
\max\{E \cdot V_D\} &= \frac{3\pi\varrho}{64\varepsilon_0} R^4
\end{aligned}$$