

5. cvičení

1.

Pro rozdělení nábojů v jednotlivých částech platí:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q'_1 &= Q_2 + Q'_2 = Q \\ Q_1 + Q_0 &= Q_2 \\ Q'_2 + Q_0 &= Q'_1 \end{aligned}$$

Pro napětí na prostředním kondenzátoru platí:

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q'_1}{C'_1} = \frac{Q'_2}{C'_2} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_0}{C_0}$$

Pro napětí na horní a dolní větvi platí, že je rovno U a platí:

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q'_1}{C'_1} + \frac{Q'_2}{C'_2}$$

Pro celkovou kapacitu tedy platí:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q'_1}{\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q'_1}{C'_1}}$$

Nyní nám tedy stačí vyřešit výše uvedenou soustavu pro jednotlivé náboje, kterou můžeme převést na následující soustavu homogenních rovnic.

$$\begin{aligned} Q_1 + Q'_1 - Q_2 + Q'_2 &= 0 \\ Q_1 - Q_2 + Q_0 &= 0 \\ \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q'_1}{C'_1} - \frac{Q_0}{C_0} &= 0 \\ \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q'_1}{C'_1} + \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q'_2}{C'_2} &= 0 \end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy a dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q_1 + \frac{C'_1(C_1C'_2 + C_2C'_2 + C_2C_0 + C'_2C_0)}{C_1(C'_1C_2 + C_2C'_2 + C_2C_0 + C'_2C_0)} Q_1}{\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_1}{C_2} \frac{C_2(C_1C'_1 + C_1C'_2 + C_1C_0 + C'_1C_0)}{C_1(C'_1C_2 + C_2C'_2 + C_2C_0 + C'_2C_0)}} \\ C &= \frac{C_0(C_1 + C'_1)(C_2 + C'_2) + C_1C_2(C'_1 + C'_2) + C'_1C'_2(C_1 + C_2)}{C_0(C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2) + (C_1 + C_2)(C'_1 + C'_2)} \end{aligned}$$

2.

Nebot' kondenzátor není připojen ke zdroji, dojde vytažením ke změně napětí, ovšem zachová se jeho náboj.

$$\begin{aligned}Q_0 &= Q \\ \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} U_0 &= \varepsilon_0 \frac{S}{d} U \\ U &= \varepsilon_r U_0\end{aligned}$$

Práce potřebná k vytažení je rovna změně vnitřní energie kondenzátoru.

$$\begin{aligned}E_0 &= \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} U_0^2 \\ E &= \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r^2 \frac{S}{d} U_0^2 \\ W &= -(E - E_0) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r (\varepsilon_r - 1) \frac{S}{d} U_0^2\end{aligned}$$

Pro sílu platí:

$$\begin{aligned}dF &= \frac{Q}{d} dU \\ F &= \int_{U_0}^U \frac{Q}{d} dU = \frac{Q}{d} (U - U_0) = \frac{Q}{d} (\varepsilon_r U_0 - U_0) = \frac{Q}{d} U_0 (\varepsilon_r - 1)\end{aligned}$$