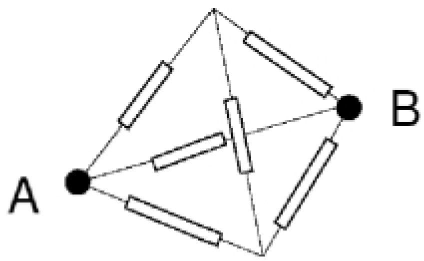
Jakub Juránek, UČO 393110

8. cvičení

1.
Schéma:



Díky symetrii čtyřstěnu je jeho na vedlejších vrcholech, ty nepřipojené, stejný potenciál, tedy mezi nimi nepoteče proud a můžeme tak tuto hranu vypustit.
Zbylé zapojení se skládá ze třech paralelních rezistorů o odporech $2R$, R a $2R$.
Pro celkový odpor mezi vrcholy A, B tedy platí:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{4}{2R} = \frac{2}{R}$$

$$R_{AB} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}\,\Omega$$

2.
Odpor R_c nekonečného řetězce se nezmění, připojíme-li před něj jednu dvojici odporů $R_1 - R_2$, prvně R_2 paralelně a poté R_1 sériově. Platí tedy vztah:

$$R_c = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_2}} = R_1 + \frac{R_c R_2}{R_c + R_2}$$

$$R_c^2 - R_1 R_c - R_1 R_2 = 0$$

$$R_c = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}$$

Uvažme 2. Kirchhoffův zákon pro smyčku jdoucí od zdroje přes n odporů R_1 do n-tého uzlu, poté odporem R_2 a zpět do zdroje.
i-tým odporem R_1 teče proud I_i dle potenciálního spádu na jeho koncích, který se dá vyjádřit vztahem:

$$I_i = \frac{U_{i-1} - U_i}{R_1}$$

Proud tekoucí odporem R_2 z n-tého uzlu můžeme vyjádřit pomocí 1. Kirchhoffa zákona.
Je tedy roven proudu I_n, od kterého odečteme proud jdoucí do zbytku řetězce, který má vzhledem k jeho nekonečné povaze odpor R_c, ale vstupní napětí U_n.
2. Kirchhoffův zákon:

$$U_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_{i-1} - U_i}{R_1} R_1 + \left(\frac{U_{n-1} - U_n}{R_1} - \frac{2U_n}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}} \right) R_2$$

$$U_0 = U_0 - U_n + \left(\frac{U_{n-1} - U_n}{R_1} - \frac{2U_n}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}} \right) R_2$$

$$U_n \left[R_1^2 + 3R_1 R_2 + (R_1 + R_2)\sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2} \right] = U_{n-1} \left[R_1 R_2 + R_2 \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2} \right]$$

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{R_1 R_2 + R_2 \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{R_1^2 + 3R_1 R_2 + (R_1 + R_2)\sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}} = \frac{2R_2}{R_1 + 2R_2 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}$$

Napětí $U_1, U_2, \ldots$ tvoří tedy geometrickou posloupnost s kvocientem

$$q = \frac{2R_2}{R_1 + 2R_2 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}$$

Má-li být $q = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2R_2}{R_1 + 2R_2 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}} &= \frac{1}{2} \\ 2R_2 - R_1 &= \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2} \\ 4R_2^2 - 4R_1 R_2 + R_1^2 &= R_1^2 + 4R_1 R_2 \\ R_2 &= 2R_1 \end{aligned}$$