Jakub Juránek, UČO 393110

9. cvičení

1.
Biot-Savartův zákon:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int\limits_l \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

V našem případě je $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, délka $l = 2\pi R$ a úhel sevřený vektory $\mathrm{d}\vec{l}$ a $\vec{r}$ je roven $\frac{\pi}{2}$, neboť vektor $\vec{r}$ leží v rovině určené normálovým vektorem $\mathrm{d}\vec{l}$.
Vzhledem k symetrii víme, že se výsledná indukce bude v ose z, ostatní složky se vykonpenzují, tudíš do velikosti budeme sčítat jen z-tové složky. Je tedy nutné každý jednotlivý příspěvek B vynásobit sinem úhlu mezi osou z a polohovým vektorem. Tento sinus je nezávislý na poloze jednotlivého elementu, proto jím pak stačí vynásobit celkovou indukci. Přitom je roven $\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R}{R^2 + z^2} \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2.

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S}$$

Umístíme si střed koule do středu soustavy souřadnic. Měl-li by mít střed nenulovou vzálenost od osy z, jistě by to bylo v zadání uvedeno.
K výslednému magnetickému dipólovému momentu se dostaneme integrací.
Za element zvolíme soustředné válcové plochy o poloměru x, s osou symetrie v ose z, s elementární tloušťkou a příslušnou výškou $2\sqrt{R^2 - x^2}$.
Pro tyto elementy pak platí, že příslušné magnetické dipólové momenty odpovídají stejné ploše, a jejich elementární proud je způsoben rotací této válcové plochy kolem osy.

$$\mathrm{d}I = qf = q\frac{\omega}{2\pi} = 2x\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x\varrho\omega$$

$$S = \pi x^2$$

$$m = \int\limits_0^R (2x\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x\varrho\omega) \cdot (\pi x^2) = 2\varrho\omega \int\limits_0^R x^3\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{4}{15}\pi\varrho\omega R^5$$