

Úloha č. 4 - Měření tíhového zrychlení

1 Teorie

1.1 Závislost periody fyzického kyvadla na poloze osy rotace

Uvědomme si, že perioda fyzického kyvadla nezávisí, na rozdíl od matematického kyvadla, nejen na vzálenosti těžiště (u matematického kyvadla jde o hmotný bod) od osy rotace, nýbrž i na momentu setrvačnosti kyvadla vzhledem k této ose.

Při aproximaci nulových kmitů a využití Steinerovy tak dostáváme vztah pro výpočet periody:

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mx^2}{mgx}}$$

kde J_0 je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose kolmo procházející těžištěm, m hmotnost kyvadla a x vzdálenost osy od osy procházejícím těžištěm.

Moment J_0 kyvadla, což je tyč, můžeme ale spočítat ze vztahu: $J_0 = \frac{1}{12}mL^2$, kde L je délka tyče.

Po dosazení:

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12}mL^2 + mx^2}{mgx}} = \pi \sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{3gx}}$$

Chceme-li zjistit, ve kterém místě bude perioda nejmenší, zderivujeme uvedený vztah podle x a položíme rovno nule.

Dostáváme tedy vzdálenost x_m , pro který je perioda nejmenší, jako:

$$x_m = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

1.2 Měření tíhové zrychlení reverzním kyvadlem

Reverzní kyvadlo je tyč, která je schopna kyvu kolem dvou různých os.

Označme L^* tzv. redukovanou délku, tedy vzdálenost dvou daných os.

Umístíme-li nyní závaží do vzdálenosti y od bližší osy, může nám kyvadlo kývat ve vzdálenostech těžiště (tedy závaží) od osy y a $L^* + y$

Pro výpočet periody u reverzního kyvadla použijeme stejný vztah jako minule, tedy:

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mx^2}{mgx}}$$

Ovšem musíme si uvědomit, že jde o zjednodušení, které nám způsobí, při amplitudě 5° , relativní chybu $r(T) = 5 \cdot 10^{-4}$.

Docílíme-li pro nějaké y_0 rovnosti period T_0 kmitů podle obou os, zbavíme se v rovnici pro tutu periodu momentu setrvačnosti i hmotnosti a dostaneme vztah:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L^*}{g}}$$

Z tohoto vztahu pak můžeme vypočítat tíhové zrychlení g :

$$g = 4\pi^2 \frac{L^*}{T_0^2}$$

Ze zákona šíření nejistot pak dostáváme:

$$r(g) = \sqrt{r(L^*)^2 + 4r(T_0)^2}$$

2 Postup měření

Měření probíhalo za těchto podmínek:

teplota ... 23,1 °C

tlak ... 98,5 kPa

vlhkost ... 46 %

2.1 Fyzické kyvadlo

Nejprve změříme délku L kyvadla.

$$L = 100 \text{ cm}$$

Nejmenší perioda by tedy dle vzorce měla nastat pro:

$$x_m = 29 \text{ cm}$$

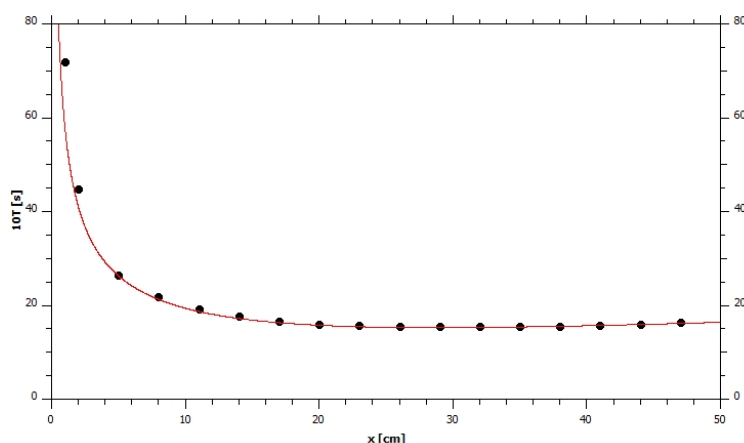
Nyní tedy budeme měnit polohu osy rotace a pro každou stopkami změříme dobu $10T$.

Tam kde má nastat minimum pro T , musí nastat i pro $10T$.

Měření budeme provádět pro různé osy od konce tyče až k těžišti, jejich rozestupy zvolíme 3 cm.

Naměřené hodnoty:

x [cm]	$10T$ [s]
47	16,3
44	16,0
41	15,8
38	15,5
35	15,5
32	15,6
29	15,6
26	15,6
23	15,7
20	16,0
17	16,7
14	17,7
11	19,3
8	21,8
5	26,5
2	44,8
1	72,0



Z tabulky nám tedy vyplývá, po zohlednění možné nepřesnosti způsobené ručním měřením, že x'_m leží někde mezi 23 a 41 cm, tedy $x'_m \doteq 32$ cm.

2.2 Reverzní kyvadlo

Nejprve změříme redukovanou délku L^* kyvadla, tedy vzdálenost dvou břitů.

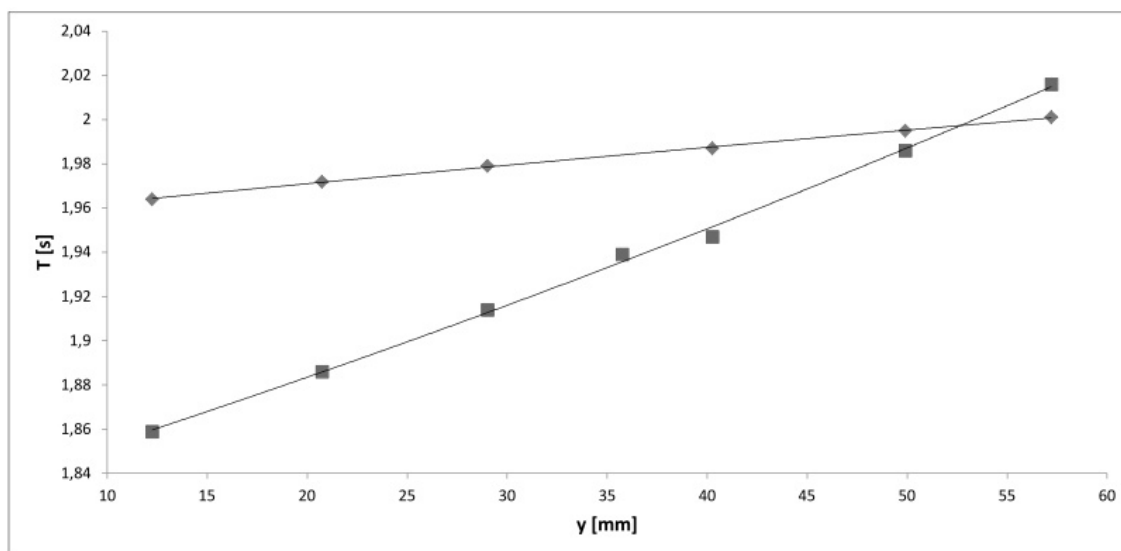
$$L^* = (99,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Umístíme závaží do vzdálenosti y jeho bližšího konce od jednoho z břitů. Zavěšíme za vzdálenější břit a počítačově změříme několik period. Za příslušnou periodu pak vezmeme jejich průměr. Totéž uděláme pro zavěšení za bližší břit. Poté změníme vzdálenost y a děláme to tak dlouho, dokud se nám neprohodí větší a menší perioda.

Získané závislosti vložíme do grafu, proložíme jimi polynomické spojnice druhého stupně a v jejich průniku odečteme hledaný čas T_0 .

Pokud nám jedna hodnota vyletí výrazně mimo spojnici, došlo nejspíše v tomto případě k chybě měření. Z grafu ji tedy vyloučíme a provedeme nové plození a odečtení T_0 .

Za nejistotu odečtené hodnoty T_0 vezmeme 0,001 s.



$$y_0 = 53,9 \text{ mm}$$

$$T_0 = 1,999 \text{ s}$$

$$g = (9,78 \pm 0,01) \text{ ms}^{-2}$$

3 Závěr

Při měření periody fyzického kyvadla jsme dospěli k tomu, že teoreticky spočítaná vzdálenost osy od těžiště opravdu leží v námi změřeném intervalu, ikdyž její přesné určení z měřených hodnot není možné, zejména kvůli tomu, že i doba 10 period se na tomto intervalu liší tak málo, že je to silně pod možnou přesností lidského měření.

Ovšem naše odhadnutá hodnota je té teoretické velmi blízko, odchylka 3 cm bude způsobena jednak možnou nepřesností ručního měření, jednak nenulovou hmotností úchyty, který tak posouvá těžiště celého kyvadla.

Vypočtená hodnota tíhového zrychlení nám vyšla o málo méně, než je udávaná místní hodnota, a to po té, co jsme odstranili jednu naměřenou hodnotu periody, která ležela evidentně mimo trend vývoje. S jejím zahrnutím bysme dostali tíhové zrychlení $(9,82 \pm 0,01) \text{ ms}^{-2}$, tedy větší, než je udávaná místní hodnota. Výrazné odchylení od grafu uvedeného v dokumentaci k úloze je s největší pravděpodobností způsobeno tím, že my jsme udávali vzdálenost y jako vzdálenost jednoho konce závaží od břítu, zatímco v dokumentaci nejspíše udávali y jako vzdálenost druhého konce závaží od konce tyče.